Α΄ ΤΑΞΗ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΚΑΙ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

(ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ)

Β. Για να έχει άπειρες λύσεις η εξίσωση, πρέπει να είναι της μορφής: $0x = 0$. Δηλαδή πρέπει $(\lambda^{2020} + \mu^{2021} + \lambda\mu - 1) = 0$ και $(\lambda + 1)^2 + (\mu - 1)^2 = 0$. Από τη δεύτερη ισότητα προκύπτει ότι $(\lambda + 1)^2 = 0$ και $(\mu - 1)^2 = 0$ που σημαίνει ότι $\lambda = -1$ και $\mu = 1$.

Ελέγχουμε τώρα και την πρώτη ισότητα αντικαθιστώντας τα λ,μ: $\lambda^{2020} + \mu^{2021} + \lambda\mu - 1 = (-1)^{2020} + 1^{2021} + (-1) \cdot 1 - 1 = 0$.

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι $\lambda = -1$ και $\mu = 1$.

Γ. Αντικαθιστούμε στο Π.Θ. : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = (x + 2)^2 + (x + 1)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Προφανώς απορρίπτεται η τιμή -2 και τελικά $x = 2$.

Ε. α. Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{4}$.

β. Ομοίως, $\lambda < \frac{1}{4}$ και γ. $\lambda = \frac{1}{4}$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ $\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0$ και η ρίζα της είναι: $x = -\frac{1}{2}$.

ΣΤ. 1. $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-3}{1} = 3$ 2. $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$

3. $(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow S^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2P$
$\Leftrightarrow 9 = x_1^2 + x_2^2 - 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 11$

4. $\frac{x_1}{x_2+1} + \frac{x_2}{x_1+1} = \frac{x_1^2+x_1+x_2^2+x_2}{x_1x_2+x_1+x_2+1} = \frac{14}{3}$.

Ζ. $(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow S^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2P \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \Leftrightarrow 10 = \left(\frac{-2}{\lambda-2}\right)^2 - 2\frac{-\lambda+4}{\lambda-2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0$. Οι τιμές που προκύπτουν είναι: $\lambda = 1$ ή $\lambda = \frac{5}{2}$.

Α. 1. Αδύνατη 2. Άπειρες λύσεις 3. $x = -1$

Δ. 1. $x = 1$ 2. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ 3. $x_1 = \alpha + \beta$, $x_2 = \alpha - \beta$